

Lösungen der Übungsaufgaben aus Kapitel 21

(1) Zeigen Sie, dass im log-linearen Modell basierend auf einer Referenzkategorie

$$\hat{\delta}_{11}^{AB} = \ln \left(\frac{n_{11} \cdot n_{22}}{n_{12} \cdot n_{21}} \right) \text{ gelten muss.}$$

Für die Zellkombination (1,1) gilt nach Gleichung F 21.19:

$$\ln(n_{11}) = \hat{\delta} + \hat{\delta}_1^A + \hat{\delta}_1^B + \hat{\delta}_{11}^{AB}$$

Hieraus erhält man durch Umformen

$$\hat{\delta}_{11}^{AB} = \ln(n_{11}) - \hat{\delta} - \hat{\delta}_1^A - \hat{\delta}_1^B$$

Ersetzt man die geschätzten log-linearen Parameter durch ihre Schätzungen, die auf den beobachteten Häufigkeiten n_{ij} basieren, erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{11}^{AB} &= \ln(n_{11}) - \ln(n_{22}) - \ln(n_{12}) + \ln(n_{22}) - \ln(n_{21}) + \ln(n_{22}) \\ &= \ln(n_{11}) - \ln(n_{12}) - \ln(n_{21}) + \ln(n_{22}) \\ &= \ln(n_{11}) + \ln(n_{22}) - \ln(n_{12}) - \ln(n_{21}) \\ &= \ln \left(\frac{n_{11} \cdot n_{22}}{n_{12} \cdot n_{21}} \right) \end{aligned}$$

(2) Zeigen Sie, dass im Unabhängigkeitsmodell für eine 2x2-Tabelle alle Koeffizienten $\hat{\gamma}_{ij}^{AB}$ den Wert 1 annehmen müssen.

Der Koeffizient $\hat{\gamma}_{ij}^{AB}$ ist im Unabhängigkeitsmodell wie folgt definiert:

$$\hat{\gamma}_{11}^{AB} = \sqrt[4]{\frac{e_{11} \cdot e_{22}}{e_{12} \cdot e_{21}}} = \sqrt[4]{\frac{\hat{\pi}_{11} \cdot \hat{\pi}_{22}}{\hat{\pi}_{12} \cdot \hat{\pi}_{21}}}$$

Dies folgt aus Gleichung F 21.8 und dem Sachverhalt, dass die log-linearen Parameter in einem restringierten Modell auf Grundlage der geschätzten erwarteten Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Im Unabhängigkeitsmodell gilt: $e_{ij} = n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}$. Hieraus ergibt sich:

$$\hat{\gamma}_{11}^{AB} = \sqrt[4]{\frac{e_{11} \cdot e_{22}}{e_{12} \cdot e_{21}}} = \sqrt[4]{\frac{n_{1\bullet} \cdot n_{\bullet 1} \cdot n_{2\bullet} \cdot n_{\bullet 2}}{n_{1\bullet} \cdot n_{\bullet 2} \cdot n_{2\bullet} \cdot n_{\bullet 1}}} = 1$$

Aufgrund von Gleichung F 21.9 müssen auch alle anderen Koeffizienten $\hat{\gamma}_{ij}^{AB}$ gleich 1 sein.

(3) Berechnen Sie die Werte der Pearson-Teststatistik und des Likelihood-Ratio-Tests für das Modell $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{jk}^{AC}$ und die Daten in Tabelle 21.3.

Die erwarteten Häufigkeiten unter dem Modell $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{jk}^{AC}$ sind in Tabelle 21.10 zusammengestellt. Setzt man diese erwarteten Häufigkeiten und die beobachteten Häufigkeiten aus Tabelle 21.3 in die Formeln F 21.30 und F 21.31, die man für den dreidimensionalen Fall erweitern muss, ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
 PE &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \frac{(n_{ijk} - e_{ijk})^2}{e_{ijk}} = \frac{(14 - 18,188)^2}{18,188} + \frac{(25 - 20,812)^2}{20,812} + \frac{(30 - 25,812)^2}{25,812} + \frac{(45 - 49,188)^2}{49,188} \\
 &\quad + \frac{(122 - 117,812)^2}{117,812} + \frac{(81 - 85,188)^2}{85,188} + \frac{(87 - 91,188)^2}{91,188} + \frac{(114 - 109,812)^2}{109,812} \\
 &= 3,550
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 LR &= 2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K n_{ij} \cdot \ln \frac{n_{ij}}{e_{ij}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K 2 \cdot n_{ij} \cdot \ln \frac{n_{ij}}{e_{ij}} \\
 &= 2 \cdot 14 \cdot \ln \frac{14}{18,188} + 2 \cdot 25 \cdot \ln \frac{25}{20,812} + 2 \cdot 30 \cdot \ln \frac{30}{25,812} + 2 \cdot 45 \cdot \ln \frac{45}{49,188} \\
 &\quad + 2 \cdot 122 \cdot \ln \frac{122}{117,812} + 2 \cdot 81 \cdot \ln \frac{81}{85,188} + 2 \cdot 87 \cdot \ln \frac{87}{91,188} + 2 \cdot 114 \cdot \ln \frac{114}{109,812} \\
 &= 3,562
 \end{aligned}$$

(4) Schätzen Sie die Parameter λ_i^A , λ_j^B und λ_k^C für das Modell

$\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{jk}^{AC}$ anhand der Daten in Tabelle 21.10.

Überträgt man Gleichung F 21.38 auf den Fall erwarteter Häufigkeiten, auf die man in restringierten Modellen zurückgreift, gilt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_1^A &= \sqrt[8]{\prod_{j=1}^2 \prod_{k=1}^2 \frac{e_{1jk}}{e_{2jk}}} = \sqrt[8]{\frac{e_{111} \cdot e_{112} \cdot e_{121} \cdot e_{122}}{e_{211} \cdot e_{212} \cdot e_{221} \cdot e_{222}}} \\
 &= \sqrt[8]{\frac{18,188 \cdot 20,812 \cdot 25,812 \cdot 49,188}{117,812 \cdot 85,188 \cdot 91,188 \cdot 109,812}} = 0,513
 \end{aligned}$$

Für $\hat{\lambda}_1^A$ ergibt sich $\hat{\lambda}_1^A = \ln(\hat{\gamma}_1^A) = \ln(0,513) = -0,667$ und hieraus $\hat{\lambda}_2^A = -\hat{\lambda}_1^A = 0,667$. Für $\hat{\gamma}_1^B$ erhält man in analoger Weise:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_1^B &= \sqrt[8]{\prod_{i=1}^2 \prod_{k=1}^2 \frac{e_{i1k}}{e_{i2k}}} = \sqrt[8]{\frac{e_{111} \cdot e_{112} \cdot e_{211} \cdot e_{212}}{e_{121} \cdot e_{122} \cdot e_{221} \cdot e_{222}}} \\
 &= \sqrt[8]{\frac{18,188 \cdot 20,812 \cdot 117,812 \cdot 85,188}{25,812 \cdot 49,188 \cdot 91,188 \cdot 109,812}} = 0,860
 \end{aligned}$$

Somit sind $\hat{\lambda}_1^B = \ln(0,860) = -0,151$ und $\hat{\lambda}_2^B = 0,151$. Für $\hat{\gamma}_1^C$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma}_1^C &= \sqrt[8]{\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^2 \frac{e_{ij1}}{e_{ij2}}} = \sqrt[8]{\frac{e_{111} \cdot e_{121} \cdot e_{211} \cdot e_{221}}{e_{112} \cdot e_{122} \cdot e_{212} \cdot e_{222}}} \\
 &= \sqrt[8]{\frac{18,188 \cdot 25,812 \cdot 117,812 \cdot 91,188}{20,812 \cdot 49,188 \cdot 85,188 \cdot 109,812}} = 0,923
 \end{aligned}$$

Daher sind $\hat{\lambda}_1^C = \ln(0,860) = -0,080$ und $\hat{\lambda}_2^C = 0,080$.

(5) Bestimmen sie alle hierarchischen additiven log-linearen Modelle für die $2 \times 2 \times 2$ -Tabelle. Stellen Sie die Modelle als Populationsmodelle dar.

- (a) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{ik}^{AC} + \lambda_{ijk}^{ABC}$
- (b) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{ik}^{AC}$
- (c) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{jk}^{BC}$
- (d) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB} + \lambda_{ik}^{AC}$
- (e) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{jk}^{BC} + \lambda_{ik}^{AC}$
- (f) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ij}^{AB}$
- (g) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{ik}^{AC}$
- (h) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{jk}^{BC}$
- (i) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_{ij}^{AB}$
- (j) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_k^C + \lambda_{ik}^{AC}$
- (k) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_j^B + \lambda_k^C + \lambda_{jk}^{BC}$
- (l) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_k^C$
- (m) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_j^B$
- (n) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A + \lambda_k^C$
- (o) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_j^B + \lambda_k^C$
- (p) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_i^A$
- (q) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_j^B$
- (r) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda + \lambda_k^C$
- (s) $\ln(\varepsilon_{ijk}) = \lambda$