

Antworten zu Kapitel 14: Vergleich mehrerer abhängiger Stichproben: Varianzanalysen mit Messwiederholung und verwandte Verfahren

(1) Was besagt das Populationsmodell der einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung?

$$x_{mj} = \mu + \tau_j + \pi_m + \varepsilon_{mj}$$

(2) Wie lassen sich die Parameter dieses Modells aus den Daten schätzen?

Die vier Modellparameter können wie folgt geschätzt werden:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\tau}_j = \bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}$$

$$\hat{\pi}_m = \bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{mj} = e_{mj} &= (\bar{x}_{mj} - \bar{x}) - (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}) - (\bar{x}_{m\bullet} - \bar{x}) \\ &= \bar{x}_{mj} - \bar{x}_{\bullet j} - \bar{x}_{m\bullet} + \bar{x} \end{aligned}$$

(3) Wie lauten die Voraussetzungen für die Anwendung des *F*-Tests bei der einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung?

(1) Die zufälligen Personeneffekte π_m sind unabhängig und identisch normalverteilt mit $N(0, \sigma_\pi^2)$.

(2) Die Residuen ε_{mj} sind unabhängig und identisch normalverteilt mit $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

(3) Die Kovarianz der Personeneffekte und der Residuen ist gleich 0: $\text{Cov}(\pi_m, \varepsilon_{mj}) = 0$.

Aus diesen Annahmen folgt, dass alle Faktorstufen in der Population eine konstante Varianz aufweisen, die der Summe aus der Personvarianz und der Residualvarianz entspricht, und dass die Kovarianz der Messwerte zwischen zwei beliebigen Faktorstufen der Personvarianz entspricht.

(4) Formulieren Sie die Nullhypothese einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung bei $p = 4$ Stufen auf dem messwiederholten Faktor auf zwei verschiedene Arten.

$$H_0: \mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3}$$

$$H_0: \mu_j - \mu = 0 \quad \text{für alle } j$$

(5) Was besagt die Sphäritätsannahme?

Sphärität bedeutet, dass die Varianzen aller möglichen Differenzvariablen gleich sind.

(6) Was versteht man unter der Intraklassen-Korrelation bei der einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung?

Die Intraklassen-Korrelation (abgekürzt ρ) ist definiert als der Anteil der Personvarianz (σ_π^2) an der Summe der Personvarianz und der Residualvarianz (σ_ε^2). Sie gibt an, wie ähnlich sich zwei Messwerte sind, die von derselben Person (aber unter unterschiedlichen Bedingungen bzw. zu unterschiedlichen Zeitpunkten) abgegeben werden.

(7) Wie lautet das Populationsmodell der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung auf beiden Faktoren?

$$x_{mjk} = \mu + \tau_{a_j} + \tau_{b_k} + \tau_{(a \times b)_{jk}} + \pi_m + (\tau_a \pi)_{mj} + (\tau_b \pi)_{mk} + \varepsilon_{mjk}$$

(8) Welche Annahmen und Voraussetzungen werden beim Modell der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor gemacht?

- (1) Die bedingten Personeneffekte $\pi_{m(j)}$ innerhalb einer Gruppe j sind voneinander unabhängig und folgen einer Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz $\sigma_{\pi(j)}^2$.
- (2) Die Residualeinflüsse ε_{mjk} sind voneinander unabhängig und folgen einer Normalverteilung mit dem Mittelwert 0 und der Varianz σ_ε^2 .
- (3) Personeneffekte und Residualeinflüsse sind voneinander unabhängig.

Als Konsequenz dieser Annahmen folgt die Kovarianzstruktur innerhalb jeder Stufe des nicht-messwiederholten Faktors einer CS-Struktur. Dies bedeutet, dass die Varianzen zu allen p Messgelegenheiten gleich sind und auf Populationsebene der Summe $\sigma_{\pi(j)}^2 + \sigma_\varepsilon^2$ entsprechen und dass darüber hinaus die Kovarianzen aller Messgelegenheitspaare gleich sind und auf Populationsebene der Varianz $\sigma_{\pi(j)}^2$ entsprechen. Dies gilt für alle Bedingungen a_j , so dass sich die Populations-Kovarianzmatrizen nicht zwischen den Stufen des nicht-messwiederholten Faktors unterscheiden.

(9) Wann lassen sich bei diesem Modell die Effektstärkenmaße δ_{TK} und δ_V sinnvoll interpretieren, und worin besteht der Unterschied zwischen ihnen?

Die beiden Effektstärkenmaße sind dann sinnvoll zu interpretieren, wenn man sich für die Frage interessiert, wie stark sich die Veränderung zwischen zwei Messzeitpunkten (d. h. die bedingten Haupteffekte des messwiederholten Faktors) zwischen den Stufen des nicht-messwiederholten Faktors unterscheiden. Der Unterschied zwischen δ_{TK} und δ_V besteht darin, dass bei δ_{TK} die Varianz der Prätest-Werte im Nenner steht, während bei δ_V die Varianz der Differenzvariablen im Nenner steht:

$$\delta_{TK} = \frac{\mu_{\bullet T2} - \mu_{\bullet T1}}{\sigma_1} - \frac{\mu_{\bullet K2} - \mu_{\bullet K1}}{\sigma_1}$$

$$\delta_V = \frac{\mu_{\bullet T2} - \mu_{\bullet T1}}{\sigma_D} - \frac{\mu_{\bullet K2} - \mu_{\bullet K1}}{\sigma_D}$$

Damit bezieht δ_V auch Information über das Ausmaß der differenziellen Veränderung mit ein, während δ_{TK} solche interindividuellen Unterschiede in der intraindividuellen Veränderung nicht mit berücksichtigt.

(10) Erläutern Sie in Grundzügen die Auswertungslogik, die dem Friedman-Test zugrunde liegt.

Zunächst werden die Messwerte, die jede Person m auf jeder Faktorstufe a_j abgibt, in Ränge (R_{mj}) transformiert: Die Faktorstufe, auf der eine Person m den niedrigsten Messwert aufweist, erhält den Rang 1; die Faktorstufe, auf der diese Person den höchsten Messwert aufweist, erhält den Rang p . Diese Rangtransformation erfolgt für alle Personen in der Stichprobe in gleicher Weise. Nun lassen sich über alle Personen hinweg für jede Faktorstufe getrennt Rangsummen berechnen. Wenn diese Rangsummen voneinander abweichen, spricht das gegen die Nullhypothese; wenn sie hingegen gleich sind, spricht das für die Nullhypothese.